异方差问题伪检验研究①

刘　田[1]　谈　进[2]

（1. 西南财经大学统计学院；2. 西南财经大学经济信息工程学院）

研究目标：探讨异方差相关的伪检验及参数可分辨问题。**研究方法：**运用理论分析和蒙特卡洛仿真方法。**研究发现：**同方差或异方差情形使用错误异方差的 WLS 的假设检验是错误的，易导致伪回归，常比直接使用 OLS 更糟；异方差时虽估计是一致的，即使大样本也不可直接使用 OLS 进行假设检验，因得到伪回归或将显著参数误判为不显著的可能性不会随样本增大而改善；稳健方差估计可得到 OLS 实际方差的较好估计，对原假设误判通常无影响，但参数分辨力变差，检验功效明显下降；WLS 的 BLUE 性很不稳健，只识别出引起异方差的变量而不了解其完整结构没有意义。**研究创新：**推导出参数分辨率公式，发现避免异方差伪检验的思路。**研究价值：**为正确评价存在异方差的模型提供了有益的建议。

关键词　异方差　参数分辨率　检验功效　伪检验　蒙特卡洛仿真

中图分类号　F224.0　　**文献标识码**　A

引　言

在建立计量模型进行经济问题的实证研究时，经常遇到异方差问题的困扰。任何一本计量教程都会讲授异方差的检验和解决方法（古扎拉蒂和波特，2011；潘省初，2009；庞皓，2017）。虽然异方差的存在并不改变 OLS 参数估计的无偏性与一致性，但对参数估计的有效性有影响，降低参数估计的精度并使得参数估计趋近于参数真实值的速度大大降低，要达到同样的估计精度，需要大得多的样本容量。更重要的是，如果不考虑存在的异方差，常规 OLS 得到的参数估计的方差是错误的，将严重影响参数的显著性检验而得出错误的结论。

回归分析主要有两个目的，一是预测，关注的是预测的精度问题；二是评价，假设检验的可靠性非常重要。两个检验误判率非常关键：一是将不显著的参数误判为显著的概率，二是将显著的参数误判为不显著的概率。将本不显著的参数误判为显著，会得到两个无关变量的相关关系，也就是“伪回归”的结果。将显著的情形误判为不显著，将忽略掉对研究对象有影响的因素。两种情形都将得到错误的因果关系和错误的模型设定，都是我们应该极力避免的。从模型设定的角度看，第一种错误将得到一个“过大”的模型，即过拟合的结果，第二种错误将得到一个“过小”的模型，即欠拟合的结果。因欠拟合的危害远严重于过拟合，故而第二种错误更为严重，但实践中常常被忽略。

解决异方差问题可以使用模型变换法，或等价的加权最小二乘（WLS），这样可得到

①　本文获教育部人文社会科学研究规划基金项目（15YJA910003）、中央高校基本科研业务费专项资金创新团队项目“时间序列前沿研究团队”（JBK150501）的资助。

BLUE 估计量，即无偏估计里方差最小的估计，这是基于样本所能得到的精度最高的估计结果。但这样理想化的解决方案需要知道异方差的准确形式，这在实践中是很难做到的。尽管有 Glesjer（1969）、White（1980）等异方差检验方法提供了判断异方差形式的大致思路，但要得到异方差形式的精确结果几乎是不可能的。我们关注的问题是，如果异方差形式判断不准确甚至错误，会不会给参数估计跟假设检验带来致命的错误结果呢？

实践中，另外一种解决异方差问题的办法是使用稳健方差的思路。存在异方差时如果不考虑异方差问题直接做 OLS，得到的参数估计是无偏且一致的，但软件输出的方差估计是完全错误的，基于该错误方差得到的区间估计与假设检验当然毫无意义，这时可使用 White（1980）提出的稳健方差估计的方法得到异方差条件下 OLS 参数估计方差的一致估计。基于 OLS 的参数估计值及该方差一致估计量可构建常规 t 检验统计量进行假设检验。但此时方差的稳健估计明显不是有效的，比最佳方差偏大，甚至远大于最佳方差，偏大的方差会导致 t 检验低估显著性吗？对假设检验的检验水平和检验功效有怎样的影响？这样得到的假设检验结果可信吗？

存在异方差时，OLS 估计依然是无偏且一致的，一致性表明随着样本增大参数估计逼近参数真实值。这是否表明大样本条件下可以直接使用 OLS 进行参加估计与假设检验，根本不用关注异方差问题呢？

异方差检验是否适用“谨慎性原则”？即在是否存在异方差检验结论不是非常明确时，假设存在异方差并使用 WLS 可以改善估计和检验结果吗？

当异方差形式判断不够精确，或者说存在轻微扰动或误差时，WLS 的 BLUE 性是稳健的吗？其抗干扰能力如何呢？

这些问题在理论和实证分析中无疑都具有重大意义，本文尝试用理论分析和仿真研究的方法回答这些问题。

一、蒙特卡洛仿真实验设计

本文使用蒙特卡洛仿真实验的方法，对加权最小二乘时异方差或权重错误选择及异方差时使用常规 OLS 方法导致的对无偏性、一致性、方差估计及显著性检验等问题进行研究，特别是显著性检验是实证研究中的重要问题，其误判率的高低对结论稳健性有重大影响。

仿真研究中使用的数据生成过程为：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \tag{1}$$

其中，β_1、β_2 为设定的待估计参数，实验中我们一般取 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$ 进行参数估计无偏性、一致性与显著性检验的验证，当然取其他值结论是一样的；X_i 取（0，10）间均匀分布的随机变量；扰动项 $u_i=\varepsilon_i\sigma_i$，$\varepsilon_i$ 取独立同分布的标准正态分布，σ_i^2 为扰动项的方差，其取不同的生成方式可得到不同的异方差情形，假如其值随 X_i 变化，可将扰动项方差表示为 $\mathrm{var}(u_i)=\sigma_i^2=f(X_i)$。下标 $i=1，2，3，\cdots，n$，其中 n 为样本长度，分别取 25、50、100、150、250、500、1000、2000 进行仿真研究，代表小、中、大样本的各种情形。

在使用 WLS 或模型变换的方法解决异方差问题时，使用正确的异方差 $\sigma_i^2=f(X_i)$ 可得到 BLUE 估计量，但实证分析中通常并不知道准确的异方差形式，人们常在以下几种异方差中进行选择（假设 X_i 为正数）：一是递增型异方差 $\sigma_i^2=X_i$、$\sigma_i^2=X_i^2$，二是递减型异方差 $\sigma_i^2=1/X_i$、$\sigma_i^2=1/X_i^2$，也有人会尝试将式（1）的回归残差平方 e_i^2 作为异方差估计，从而

选择 $\sigma_i^2 = e_i^2$。

使用蒙特卡洛进行仿真研究时，首先选定样本长度 n，然后用随机数发生器生成 n 个 X_i 及 ε_i，根据设定的 β_1、β_2 及 σ_i^2，由式（1）可得到 n 个 Y_i，根据 n 对（X_i，Y_i）的数据使用 OLS 或 WLS 进行参数估计，完成一次仿真实验。实验重复 N 次（实验时取 2000 次），以计算各种情况下 OLS 或 WLS 的参数估计的均值、方差与显著性检验的误判率。比如对参数 β_2，第 i 次实验的估计值记为 $\hat{\beta}_2^{(i)}$，$i=1$，2，…，N，可看作随机变量 $\hat{\beta}_2$ 的一次抽样观测值。根据 N 个随机抽样值，计算出其样本均值与样本方差，可分别看作参数估计 $\hat{\beta}_2$ 的均值与方差的很好的近似，即：

$$E(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\beta}_2^{(i)} \tag{2}$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[\hat{\beta}_2^{(i)} - E(\hat{\beta}_2)]^2 \tag{3}$$

在蒙特卡洛仿真实验时，通过设置同样的随机数发生器的种子，以保证对比研究中使用相同的随机数据生成过程进行计算。

二、假设检验功效及最小可分辨尺度公式推导

在式（1）中，如果变量 X_i 的系数为 0，表示该变量对 Y_i 无影响；系数为非 0 的 β_2，表示该变量对 Y_i 有影响。显著性检验的原假设为 H_0：$\beta_2=0$，备择假设为 H_1：$\beta_2\neq0$。检验统计量为：

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2 + \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} + \frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} \tag{4}$$

假设检验中，设选定的显著水平为 α，对应的双边检验临界值为 $t_{\alpha/2}$。式（4）算出的统计量如果满足 $-t_{\alpha/2}<t<t_{\alpha/2}$，假设检验将判断 β_2 为 0，是不显著的；如果满足 $t>t_{\alpha/2}$ 或 $t<-t_{\alpha/2}$，假设检验将判断 β_2 非 0，是显著的。最理想的假设检验应该是：如果 $\beta_2=0$，假设检验也认为其为 0；如果 $\beta_2\neq0$，假设检验也认为其不为 0。将为 0 的参数误判为非 0 的概率即为显著水平 α，这通过选择不同的检验临界值是可以人为选择控制的，实践中一般选择为 5%；将非 0 的参数判断为非 0 的概率，即为检验功效（Power）。选定显著水平 α 后，检验功效是无法同时控制其大小的（刘田等，2013）。

故有检验功效：

$$Power = \Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} > t_{\alpha/2} - \frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}\right) + \Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} < -t_{\alpha/2} - \frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}\right) \tag{5}$$

如果标准方差 $S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）估计准确，$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}$将为 t 分布或渐近正态分布。不失一般性假设 $\beta_2>0$，则式（5）中，$\Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} < -t_{\alpha/2} - \frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}\right) < \Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} < -t_{\alpha/2}\right) = \alpha/2$，则检验功效主要由 $\Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)} > t_{\alpha/2} - \frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}\right)$决定。很明显，检验功效跟选择的显著水平 α 有关，显著水平越高，检验功效越大；同时$\frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}$越大，检验功效也越高。当 α 跟 β_2 固定

时，估计出的标准误 $S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）越大，检验功效越低，将显著参数误判为不显著的可能性越高。

如果$\frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}=t_{\alpha/2}$，检验功效略大于 50%。如果$\frac{\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}=2t_{\alpha/2}$，此时的检验功效为：$Power=\Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}>-t_{\alpha/2}\right)+\Pr\left(\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{S\hat{E}(\hat{\beta}_2)}<-3t_{\alpha/2}\right)\approx1-\frac{\alpha}{2}$，误将显著判断为不显著的概率大致为$\frac{\alpha}{2}$。比如显著水平选择 5%，此误判率为 2.5%，我们认为这个功效是一个可接受的功效。但当 α 跟 $S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）固定时，β_2 变小也将导致检验功效降低，这表明过小的 β_2 将不可辨识。

根据对称性，不难得到 $\beta_2<0$ 时的结果。于是我们得到假设检验中参数可辨识的条件为：

$$|\beta_2|\geqslant 2t_{\alpha/2}S\hat{E}(\hat{\beta}_2) \tag{6}$$

假设检验中通常选择 $\alpha=0.05$，此时 $t_{\alpha/2}\approx2$，于是参数最小可分辨尺度为：

$$|\beta_2|=4S\hat{E}(\hat{\beta}_2) \tag{7}$$

此时假设检验将非 0 显著的 β_2 误判为不显著（即为 0）的概率大致为 97.5%。式（6）或式（7）可理解为参数显著性检验的分辨率公式，度量了假设检验可分辨参数的最小尺度。也就是说，如果参数绝对值小于该值，即使非 0，假设检验也无法将其与 0 区分开，即易将该显著的参数误判为不显著。

我们通过蒙特卡洛仿真实验验证了推出的分辨率公式。比如设定样本数为 250，异方差形式为 $\sigma_i^2=X_i$，按照前述蒙特卡洛仿真实验设计，此时 $S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）$=0.04872$（随机数种子不同时可能会略有差异），当 $\beta_2=4S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）$=0.19488$ 时，仿真得到的检验功效为 0.974；当 $\beta_2=2S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）$=0.09748$ 时，仿真得到的功效为 0.4755，跟功效估算公式预测的 0.975 与 0.5 相仿。同方差时，有 $S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）$=0.02196$，当 $\beta_2=4S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）$=0.08784$ 时，仿真得到的检验功效为 0.979；当 $\beta_2=2S\hat{E}$（$\hat{\beta}_2$）$=0.04392$ 时，仿真得到的功效为 0.504，同样跟公式预测的 0.975 及 0.5 相仿。

不管是同方差情形还是异方差情形，仿真结果均验证了推导出的参数分辨尺度及检验功效估算公式，故后文涉及估算最小可分辨尺度或检验功效时，将直接使用公式估算，不再使用蒙特卡洛仿真方法进行估算。

三、异方差问题仿真研究

如果没有异方差却误选某种异方差形式进行 WLS 参数估计与显著性检验，以及存在异方差时忽略异方差使用 OLS 或错选异方差形式使用 WLS 进行参数估计与显著性检验，会得到什么结果呢？对参数估计的无偏性、有效性与一致性有影响吗？能否得到正确的方差计算结果并进行可靠的显著性检验呢？是否会得到一个伪回归的结果及错误的模型设定呢？这是实证应用中非常重要的问题。

1. 同方差情形仿真研究

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，设定同方差情形，即 $\sigma_i^2=1$，按照仿真实验设计的方法，在不同样本长度下对式（1）进行 2000 次重复仿真实验，分别使用 OLS 及不同异方差形式时 WLS 进

行估计，各异方差形式分别取为真实异方差 $f(X_i)$（此时为同方差）、残差平方 e_i^2、X_i、X_i^2、$\frac{1}{X_i}$、$\frac{1}{X_i^2}$，得到斜率与截距参数的 2000 个估计值，并根据式（2）算出不同情形时参数估计的均值、根据式（3）算出参数估计的实际方差（以下简称实方）、同时算出软件估计方差的均值（以下简称估方）及显著性检验的误判率。这里有两类方差估计结果，“实方”为 OLS 或 WLS 方法所得参数估计的真实方差，根据式（3）得到的参数估计的样本方差可认为是其很好的近似；“估方”为 OLS 或 WLS 估计方法统计软件输出的方差，这是实证分析中进行参数区间估计、显著性检验的基础。如果两个方差有较大的差异，说明估计方法软件算出的方差是错误的。

我们对 25、50、100、150、250、500、1000、2000 等不同样本长度进行了仿真研究，为了节省篇幅，这里只列出样本长度为 250 时的结果，其他样本长度的仿真结果有类似的结论。斜率与截距的均值、方差与显著性检验误判率仿真结果分别如表 1、表 2 所示。因为算出的均值、方差均较小，均值与方差数值都是实际值乘以 1000 后的结果，以后各表的均值、方差均如此处理。

表 1　同方差时斜率均值、方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=e_i^2$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$
均值	−0.144	−0.144	−0.149	1.071	12.845	0.768	1.453
实方	0.459	0.459	0.465	17.404	448.083	0.713	1.283
估方	0.470	0.470	0.004	0.911	61.788	0.710	1.105
误判率	0.048	0.048	0.876	0.703	0.601	0.050	0.064

可以看出，OLS 及各 WLS 所得参数估计的均值与参数真实值是很接近的，使用 $\sigma_i^2=X_i^2$ 进行 WLS 时差异最大，为 0.012845，也与真实值 0 较为接近。表明即使使用错误的异方差进行 WLS，也可得到无偏的结果。

同方差情形下，OLS 估计的真实方差 0.459（$\times 10^{-3}$）与软件输出的方差 0.470（$\times 10^{-3}$）是非常接近的，表明同方差情况下 OLS 可得到正确的方差结果。OLS 所得估计结果是最佳的，其所得实际方差明显小于使用错误异方差形式进行 WLS 的实际方差。对斜率是否为 0 的有效性判断的误判率跟选定显著水平 5%大致是相当的，没有明显高估或低估的情况。

使用残差平方作为异方差的估计，可以得到无偏的估计，参数估计的真实方差 0.465（$\times 10^{-3}$）跟 OLS 的 0.459（$\times 10^{-3}$）相仿，但软件算出的方差 0.004（$\times 10^{-3}$）明显偏小，导致显著性检验的误判率非常高，大概率得到一个伪回归的结果。

使用 X_i、X_i^2 作为异方差形式进行 WLS，其参数估计的真实方差明显大于同样样本大小情况下 OLS 所得方差，表明使用错误的异方差进行 WLS 导致了参数估计精度的下降，更严重的是，此时软件输出的方差明显小于真实方差，得到错误的结果。基于该偏小的错误方差，倾向于高估显著性，得到伪回归的结果。

使用 $\frac{1}{X_i}$、$\frac{1}{X_i^2}$ 作为异方差形式进行 WLS，其参数估计的真实方差同样大于相同样本大小情况下 OLS 所得方差，但程度还不算特别严重。此时软件输出的方差跟真实方差相比也存在差异，但差异不算特别大，故对显著性影响也不算大。

表 2　同方差时截距均值、方差估计（$\times10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=e_i^2$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$
均值	−0.451	−0.451	−0.545	−6.605	−13.719	−6.608	−11.810
实方	16.064	16.064	16.306	449.985	953.817	27.668	58.505
估方	16.057	16.057	0.124	2.787	0.259	36.362	67.667
误判率	0.052	0.052	0.889	0.893	0.979	0.022	0.033

截距的情况跟斜率大致类似，只是部分细节上略有不同：即使用$\frac{1}{X_i}$、$\frac{1}{X_i^2}$形式异方差进行 WLS 时软件输出的方差高于参数估计的真实方差，导致显著性水平的低估。

从表 1 和表 2 可以看到，使用错误的异方差设定进行 WLS 时会导致软件输出的方差错误，通常导致方差明显低估，有时也会导致方差高估，进而带来检验水平的扭曲。为此，可尝试使用稳健方差方法计算出方差的估计值，并联合 OLS 的参数估计值建立假设检验。

表 3 和表 4 为不同样本长度时基于 OLS 得到的实际方差和稳健方差估计结果的样本均值，作为对比，也列出最佳方差，以及 5%显著水平下基于 OLS 方差估计及稳健方差估计的显著性检验的误判率，还有参数的最佳及实际分辨尺度。最佳方差指使用正确异方差进行 WLS 所得方差均值（同方差时即为 OLS 的结果）；实际方差指不考虑异方差问题直接使用 OLS 所得参数估计的样本方差；稳健方差指基于稳健方差方法得到的方差均值。同时根据式（7），算出了最佳分辨尺度及实际分辨尺度，表示对应样本大小及解释变量结构下最好估计方法（BLUE 估计）可分辨的最小参数值及 OLS 估计方法实际可分辨的最小参数值，这里可分辨的标准为将显著的参数误判为不显著的误判率约为 2.5%。

表 3　同方差时斜率方差估计（$\times10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	4.737	2.357	1.072	0.864	0.470	0.250	0.121	0.058
最佳分辨尺度	0.275	0.194	0.131	0.118	0.087	0.063	0.044	0.030
实际方差	4.687	2.379	1.062	0.840	0.459	0.252	0.127	0.055
实际分辨尺度	0.274	0.195	0.130	0.116	0.086	0.063	0.045	0.030
稳健方差	4.415	2.282	1.057	0.853	0.468	0.249	0.121	0.058
显著性检验	0.042	0.045	0.044	0.044	0.052	0.053	0.058	0.050
显著性稳健检验	0.076	0.064	0.053	0.047	0.049	0.056	0.060	0.041

可以看出，不同样本大小下，稳健方差估计与实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计得到了实际方差的较好估计，同方差时 OLS 就是最佳估计，故实际方差跟最佳方差也是大致相同的，只是它们估计方法不同，数字上略有差异。基于 OLS 的显著性检验的误判率跟选定的显著水平相仿；基于稳健方差所得的显著性检验的误判率跟选定的显著水平也相仿，只是样本较小时略为偏高。

同时可以看出，随着样本增大，参数估计的实际方差是越来越小的，并趋近于 0，这表明随着估计精度增高，参数估计的波动性越来越小，结合无偏性的结论，表明了参数估计的一致性。同时，随着样本增大参数可分辨尺度也越来越小，当参数固定不变时，就得到了越来越好的检验功效。

表 4 是截距情况，所得结论跟斜率时是类似的。本文为节省篇幅，不再列出截距时的数据。

表 4　同方差时截距方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	172.498	82.368	40.717	27.556	16.064	8.313	3.932	1.955
最佳分辨尺度	1.661	1.148	0.807	0.664	0.507	0.365	0.251	0.177
实际方差	167.978	79.532	40.056	27.113	16.064	8.269	4.214	1.875
实际分辨尺度	1.639	1.128	0.801	0.659	0.507	0.364	0.260	0.173
稳健方差估计	162.374	79.974	40.185	27.225	15.917	8.306	3.926	1.954
显著性检验	0.042	0.045	0.044	0.044	0.052	0.053	0.058	0.050
显著性稳健检验	0.067	0.064	0.054	0.054	0.053	0.054	0.059	0.049

2.$\sigma_i^2=X_i$ 形式异方差仿真结果

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，设定异方差为 $\sigma_i^2=X_i$，按照仿真实验设计的方法，在不同样本长度下分别使用 OLS 及不同异方差形式 WLS 进行估计，并算出不同情形时参数估计的均值、参数估计的实际方差、软件估计方差的均值及显著性检验的误判率。样本长度为 250 时的斜率仿真结果如表 5 所示。

表 5　$\sigma_i^2=X_i$ 时斜率均值、方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=e_i^2$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$
均值	0.228	−0.686	0.030	−0.686	1.034	2.050	3.775
实方	2.333	0.913	2.290	0.913	4.273	5.211	10.525
估方	2.383	0.901	0.011	0.901	2.937	4.791	8.384
误判率	0.047	0.050	0.922	0.050	0.096	0.059	0.072

可以看出，使用正确的异方差 $\sigma_i^2=X_i$ 进行 WLS 得到了最佳的估计结果，所得实际方差明显小于 OLS 及使用其他错误形式异方差进行 WLS 的实际方差结果，且所得实际方差跟软件估计的方差是接近的。

普通 OLS 可得到一个无偏但非有效的结果，参数估计的实际方差明显大于 BLUE 估计的方差，但跟软件估算的方差差异不大，故对斜率是否为 0 的显著性检验的误判率跟选定显著水平 5%大致是相当的。

使用残差平方作为异方差的估计，可以得到无偏的估计，参数估计的真实方差跟 OLS 估计的真实方差相仿，但软件算出的方差明显偏小，导致显著性检验的误判率非常高，会得到一个伪回归的结果。

使用 X_i^2、$\frac{1}{X_i}$、$\frac{1}{X_i^2}$等错误的异方差形式进行 WLS 时可得到无偏的结果，但参数估计的实际方差显著大于有效的方差，甚至也明显大于 OLS 估计的方差，也就是说此时使用错误的异方差形式进行 WLS 时得到了比不考虑异方差问题直接使用 OLS 更差的估计结果。且软件输出的方差小于参数估计的实际方差，基于该偏小的错误方差，倾向于高估显著性，但误判程度不算特别严重。

表 6 为不同样本长度时最佳方差、基于 OLS 得到的实际方差和稳健方差估计结果的样本均值，以及 5％显著水平下基于 OLS 方差估计及稳健方差估计的显著性检验的误判率，同时也包含了 BLUE 最佳估计的最小可分辨尺度及 OLS 估计的实际最小可分辨尺度。

表 6　$\sigma_i^2 = X_i$ 时斜率方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	8.006	6.314	2.913	1.638	0.913	0.503	0.267	0.113
最佳分辨尺度	0.358	0.318	0.216	0.162	0.121	0.090	0.065	0.043
实际方差	24.010	10.832	4.903	4.101	2.333	1.289	0.606	0.278
实际分辨尺度	0.620	0.416	0.280	0.256	0.193	0.144	0.098	0.067
稳健方差	22.740	10.327	4.902	4.118	2.373	1.255	0.607	0.287
显著性检验	0.052	0.040	0.034	0.045	0.047	0.054	0.055	0.043
显著性稳健检验	0.081	0.067	0.051	0.053	0.046	0.056	0.054	0.045

可以看出，不同样本大小下，稳健方差估计与实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计得到了实际方差的较好估计，但都明显大于最佳方差，表明存在 $\sigma_i^2 = X_i$ 形式异方差时，不考虑异方差的 OLS 不是最佳估计。

随着样本增大，尽管存在异方差，OLS 参数估计的实际方差依然是越来越小的，并趋近于 0，结合无偏性的结论，表明了 OLS 参数估计的一致性。

基于 OLS 的显著性检验的误判率跟选定的显著水平相仿；基于稳健方差所得的显著性检验的误判率跟选定的显著水平也相仿，除了样本较小时略为偏大。尽管稳健方差较最佳方差存在明显高估，但基于稳健方差的显著性检验并没有低估现象。

虽然基于 OLS 及稳健方差估计，异方差情形的显著性检验在样本较大时没有明显扭曲，但并不表示非最优的估计对假设检验没有影响，可以滥用稳健方差方法而不考虑异方差的影响。可以看到，同样样本大小情况下，OLS 对参数的实际可分辨尺度较最佳的 BLUE 估计可分辨尺度明显增大，表明参数固定时基于 OLS 参数估计及稳健方差估计的假设检验功效明显下降，易将显著的参数误判为不显著。比如样本为 25 时，使用 $\sigma_i^2 = X_i$ 的 WLS 的最佳分辨尺度为 0.358，表明式（1）中 $\beta_2 = 0.358$ 的检验功效约为 97.5％，误将其判断为不显著的概率约为 2.5％；但使用 OLS 及稳健方差估计时，按照式（5），可估算出其检验功效约为 0.618，将有 38.2％的概率将 $\beta_2 = 0.358$ 误判为不显著。

但同时，随着样本增大，OLS 实际可分辨尺度也是逐步变小的，这表明通过增大样本容量，是可以达到跟最佳估计同样的检验功效的。比如同样对 $\beta_2 = 0.358$，当样本增大到 50 时，按照式（5）可估算出其检验功效约为 0.920，当样本增大到 100 时，可估算出其检验功效约为 0.998，已经好于样本为 25 时使用 $\sigma_i^2 = X_i$ 时 WLS 的 BLUE 估计的检验功效 0.975。

3. $\sigma_i^2 = X_i^2$ 形式异方差仿真结果

选定 $\beta_1 = 0$，$\beta_2 = 0$，设定异方差为 $\sigma_i^2 = X_i^2$，按照同样的蒙特卡洛仿真实验设计方法和步骤，样本长度为 250 时的斜率仿真结果如表 7 所示。

表7　$\sigma_i^2=X_i^2$ 时斜率均值、方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=e_i^2$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$
均值	1.147	−1.127	0.841	−1.459	−1.127	5.507	10.065
实方	18.585	4.245	17.800	5.838	4.245	44.179	92.672
估方	16.094	4.063	0.051	4.581	4.063	36.352	67.597
误判率	0.062	0.055	0.935	0.080	0.055	0.073	0.085

可以看出，使用正确的异方差 $\sigma_i^2=X_i^2$ 进行WLS得到了最佳的估计结果，所得实际方差明显小于OLS及其他错误形式异方差进行WLS的实际方差结果，且所得实际方差跟软件估计的方差是接近的。

普通OLS可得到一个无偏但远非有效的结果，软件输出的方差估计略小于参数估计的真实方差，对斜率是否为0的有效性判断的误判率跟选定显著水平5%大致是相当的。

使用残差平方作为异方差的估计得到的结果跟OLS相仿，但软件算出的方差明显偏小，导致出现伪回归的机会非常高。

使用 $\sigma_i^2=X_i$ 进行WLS时，参数估计方差略大于有效的方差，但明显小于OLS估计的方差。软件输出的方差估计略小于参数估计的实际方差，导致显著性检验误判率的轻微高估。

使用 $\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$、$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$ 进行WLS时，估计精度明显下降，软件估计的方差略小于实际方差，导致显著性检验误判率略大于选定的显著水平。

表8为不同样本长度时最佳方差、基于OLS得到的实际方差和稳健方差估计结果的样本均值，以及5%显著水平下基于OLS方差估计及稳健方差估计的显著性检验的误判率，同时也包含了BLUE最佳估计的最小分辨尺度及OLS估计的实际最小可分辨尺度。

表8　$\sigma_i^2=X_i^2$ 斜率方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	41.645	24.504	13.108	7.086	4.245	2.053	1.059	0.511
最佳分辨尺度	0.816	0.626	0.458	0.337	0.261	0.181	0.130	0.090
实际方差	200.996	82.485	39.098	32.700	18.585	10.407	4.823	2.243
实际分辨尺度	1.793	1.149	0.791	0.723	0.545	0.408	0.278	0.189
稳健方差估计	184.944	78.098	38.865	32.654	18.849	10.058	4.867	2.316
显著性检验	0.071	0.054	0.044	0.073	0.062	0.082	0.078	0.064
显著性稳健检验	0.092	0.070	0.053	0.060	0.052	0.056	0.054	0.040

可以看出，不同样本大小情况下，稳健方差估计与实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计得到了实际方差的较好估计，但都明显大于最佳方差。

随着样本增大，尽管存在异方差，OLS参数估计的实际方差呈现出越来越小的趋势，并趋近于0，表明了OLS参数估计的一致性。

OLS的显著性检验误判率略大于选定的显著水平5%，检验水平扭曲现象并不随着样本增大而改善；基于稳健方差所得的显著性检验的误判率在样本较大时跟选定的显著水平相仿，尽管稳健方差较最佳方差存在明显高估，但基于稳健方差的显著性检验并没有低估

现象。

同样样本大小的情况下，OLS 实际可分辨尺度较最佳的 BLUE 估计可分辨尺度明显增大，表明参数固定时基于 OLS 参数估计及稳健方差估计的假设检验功效检验明显下降。比如当样本为 25 时，使用 $\sigma_i^2=X_i^2$ 的 WLS 的最佳分辨尺度为 0.816，表明式（1）中 $\beta_2=0.816$ 的检验功效约为 97.5%；但使用 OLS 及稳健方差估计时，按照式（5），可估算出其检验功效约为 0.433，将有 56.7%的概率将 $\beta_2=0.816$ 误判为不显著。当样本增大到 100 时，按照式（5）可估算出其检验功效约为 0.983，已经好于样本为 25 时 BLUE 估计的检验功效 0.975。

4. $\sigma_i^2=\dfrac{1}{X_i}$ 形式异方差仿真结果

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，设定异方差为 $\sigma_i^2=\dfrac{1}{X_i}$，按照仿真实验设计的方法，样本长度为 250 时的斜率仿真结果如表 9 所示。

表 9　$\sigma_i^2=\dfrac{1}{X_i}$ 时斜率均值、方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=e_i^2$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$
均值	−0.176	0.260	−0.255	26.637	160.299	0.260	0.572
实方	2.007	0.140	1.974	4056.055	102475.571	0.140	0.180
估方	0.774	0.140	0.001	78.939	7977.706	0.140	0.164
误判率	0.233	0.046	0.964	0.935	0.859	0.046	0.056

可以看出，使用正确的异方差 $\sigma_i^2=\dfrac{1}{X_i}$ 进行 WLS 得到了最佳的估计结果，所得实际方差明显小于 OLS 及其他错误形式异方差进行 WLS 的实际方差结果，且所得实际方差跟软件估计的方差是接近的。

普通 OLS 可得到一个无偏但远非有效的结果，表明参数估计精度较最佳估计显著下降，软件输出的方差估计显著小于参数估计的真实方差，导致高估显著性，较大机会出现伪回归。

使用残差平方作为异方差的估计得到的结果跟 OLS 相仿，但软件算出的方差明显偏小，导致出现伪回归的机会非常高。

使用 $\sigma_i^2=X_i$、X_i^2 等递增型异方差进行 WLS 时，参数估计方差远大于有效的方差，也远大于 OLS 估计的方差，表明参数估计精度非常低。但软件输出的方差估计明显小于参数估计的实际方差，导致高估显著性，极可能得到伪回归的结果。

使用 $\sigma_i^2=\dfrac{1}{X_i^2}$ 进行 WLS 时，估计精度略有下降，但程度不算严重，实际方差跟软件估计的方差相仿，因而显著性检验误判率不算严重。

表 10 为不同样本长度时最佳方差，基于 OLS 得到的实际方差和稳健方差估计结果的样本均值，以及 5%显著水平下基于 OLS 方差估计及稳健方差估计的显著性检验的误判率，同时也包含了 BLUE 最佳估计的最小分辨尺度及 OLS 估计的实际最小可分辨尺度。

表 10　$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$斜率方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	1.369	0.819	0.364	0.265	0.140	0.073	0.038	0.017
最佳分辨尺度	0.148	0.114	0.076	0.065	0.047	0.034	0.025	0.016
实际方差	57.317	2.430	1.135	2.454	2.007	0.677	0.270	0.287
实际分辨尺度	0.958	0.197	0.135	0.198	0.179	0.104	0.066	0.068
稳健方差估计	47.507	2.268	1.101	2.402	2.025	0.657	0.259	0.286
显著性检验	0.250	0.161	0.167	0.219	0.233	0.229	0.204	0.250
显著性稳健检验	0.036	0.072	0.065	0.050	0.030	0.047	0.052	0.038

可以看出，不同样本大小情况下，稳健方差估计与实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计得到了实际方差的较好估计，但都远大于最佳方差。

随着样本增大，尽管存在异方差，OLS 参数估计的实际方差呈现出越来越小的趋势，并趋近于 0，表明了 OLS 参数估计的一致性。

常规 OLS 的显著性检验存在明显的检验水平扭曲，易将不显著的参数误判为显著，并且检验水平扭曲现象并不随着样本增大而改善；基于稳健方差所得的显著性检验的误判率跟选定的显著水平相仿。

同样样本大小情况下，OLS 实际可分辨尺度较最佳的 BLUE 估计可分辨尺度明显增大，表明参数固定时基于 OLS 参数估计及稳健方差估计的假设检验功效检验明显下降。比如当样本为 25 时，使用$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$的 WLS 的最佳分辨尺度为 0.148，表明式（1）中 $\beta_2=0.148$ 的检验功效约为 97.5%，误将其判断为不显著的概率略为 2.5%；但使用 OLS 及稳健方差估计时，按照式（5），可估算出其检验功效约为 0.089，将有 91.1%的概率将 $\beta_2=0.148$ 误判为不显著。当样本增大到 250 时，按照式（5）可估算出其检验功效略为 0.9，当样本增大到 500 时，可估算出其检验功效略为 0.999，已经好于样本为 25 时 BLUE 估计的检验功效 0.975。

5. $\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$形式异方差仿真结果

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，设定异方差为 $\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$，按照仿真实验设计的方法，样本长度为 250 时的斜率仿真结果如表 11 所示。

表 11　$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$时斜率均值、方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=e_i^2$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$	$\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$
均值	5.702	0.226	3.437	437.758	2318.288	0.027	0.226
实方	335.301	0.032	101.773	971221.718	24458865.099	0.056	0.032
估方	111.701	0.032	0.213	17486.701	1744272.804	0.234	0.032
误判率	0.246	0.047	1.000	0.979	0.961	0.004	0.047

可以看出，使用正确的异方差 $\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$ 进行 WLS 得到了最佳的估计结果，所得实际方差明显小于 OLS 及其他错误形式异方差进行 WLS 的实际方差结果，且所得实际方差跟软件估计的方差是接近的。

普通 OLS 可得到一个无偏但远非有效的结果，软件输出的方差估计显著小于参数估计的真实方差，导致高估显著性，较大机会出现伪回归。

使用残差平方作为异方差的估计得到的结果跟 OLS 相仿，但软件算出的方差明显偏小，导致显著性检验的误判率均非常高，会得到一个伪回归的结果。

使用 $\sigma_i^2=X_i$、X_i^2 等递增型异方差进行 WLS 时，参数估计方差远大于有效的方差，也远大于 OLS 估计的方差，表明参数估计精度非常低。但软件输出的方差估计明显小于参数估计的实际方差，导致高估显著性，得到伪回归的结果。

使用 $\sigma_i^2=\frac{1}{X_i}$ 进行 WLS 时，估计精度会略有下降，但程度不算严重，软件估计的方差远大于实际方差，导致实际显著水平明显小于选定的选择水平 5%。

表 12 为不同样本长度时最佳方差、基于 OLS 得到的实际方差和稳健方差估计结果的样本均值，以及 5%显著水平下基于 OLS 方差估计及稳健方差估计的显著性检验的误判率，同时也包含了 BLUE 最佳估计的最小分辨尺度及 OLS 估计的实际最小可分辨尺度。

表 12 $\sigma_i^2=\frac{1}{X_i^2}$ 斜率方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	0.281	0.203	0.086	0.057	0.032	0.016	0.008	0.004
最佳分辨尺度	0.067	0.057	0.037	0.030	0.023	0.016	0.011	0.008
实际方差	4826.899	8.800	3.414	66.836	335.301	45.399	13.648	199.358
实际分辨尺度	8.788	0.375	0.234	1.034	2.316	0.852	0.467	1.786
稳健方差估计	3945.428	8.052	3.318	64.147	330.770	44.081	13.231	193.688
显著性检验	0.116	0.274	0.257	0.328	0.246	0.321	0.278	0.350
显著性稳健检验	0.005	0.044	0.059	0.020	0.006	0.020	0.026	0.002

可以看出，不同样本大小情况下，稳健方差估计与实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计得到了实际方差的较好估计，但都远大于最佳方差。

随着样本增大，尽管存在异方差，OLS 参数估计的实际方差呈现出逐步变小的趋势。

常规 OLS 的显著性检验存在明显的检验水平扭曲，易将不显著的参数误判为显著，并且检验水平扭曲现象并不随着样本增大而改善；基于稳健方差所得的显著性检验的误判率很多时候明显小于选定的显著水平。

同样样本大小情况下，OLS 实际可分辨尺度远大于最佳的 BLUE 估计可分辨尺度，表明参数固定时基于 OLS 参数估计及稳健方差估计的假设检验功效检验下降非常明显。

四、Glesjer 与 White 检验对异方差的识别问题

从前面的研究我们看到，选用错误的异方差形式进行 WLS 参数估计与假设检验，并无助于结果的改善。要得到好的结果，需要知道异方差的准确形式。实践中人们常用 Glesjer 或 White 检验等方法进行异方差检验与识别，我们通过仿真实验来研究识别过程中的一些

需要注意的问题。

1. Glesjer 检验异方差识别问题

Glesjer 检验法检验和识别异方差的思路为：首先不考虑异方差问题做原始回归，以原始回归残差的绝对值作被解释变量，根据可能的异方差形式构建适当辅助回归进行异方差检验及异方差形式判断。常见的辅助回归式有：$|e_i|=\beta_1+\beta_2\sqrt{X_i}+\varepsilon_i$、$|e_i|=\beta_1+\beta_2X_i+\varepsilon_i$、$|e_i|=\beta_1+\beta_2\dfrac{1}{\sqrt{X_i}}+\varepsilon_i$、$|e_i|=\beta_1+\beta_2\dfrac{1}{X_i}+\varepsilon_i$，如果不考虑截距的影响，可将对应的异方差形式分别识别为：$\sigma_i^2=X_i$、$\sigma_i^2=X_i^2$、$\sigma_i^2=1/X_i$、$\sigma_i^2=1/X_i^2$。那么，不考虑截距项的识别结果可以接受吗？我们从显著性检验误判率的角度，对此进行仿真研究。

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，按照仿真实验设计的方法，假设真实的异方差为 $\sigma_i^2=(a+\sqrt{X_i})^2$，不考虑截距项将其识别为 $\sigma_i^2=X_i$ 并进行 WLS 能够得到理想的检验结果吗？分别以 $a=0$，0.01，0.02，…，0.99 进行仿真实验，选择 5％的显著水平，样本长度为 250，a 的每个取值重复 2000 次实验可计算出斜率与截距显著性检验的误判率，其随 a 的变化曲线如图 1 所示。

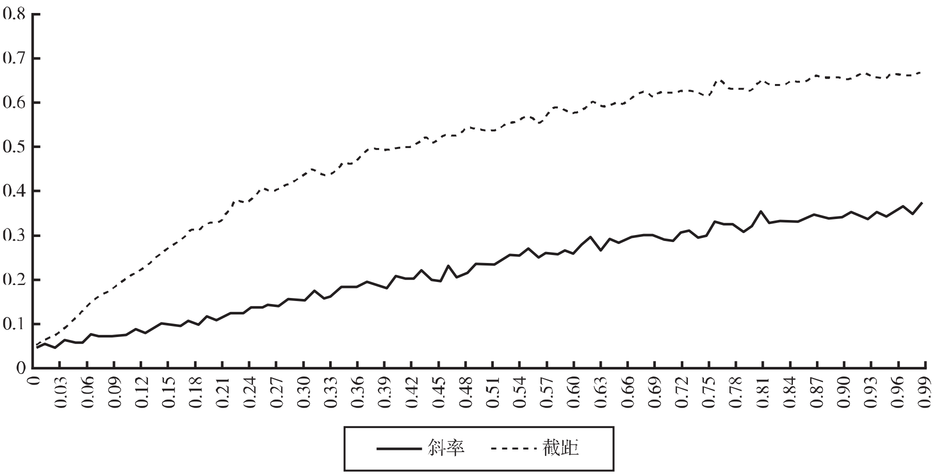

图 1　斜率与截距显著性检验误判率随 a 的变化曲线

可以看到，随着 a 值的增加，斜率与截距显著性检验的误判率都迅速增加，对 a 的值相当敏感。只有当 $a<0.06$ 时，对斜率显著性检验误判率的影响不大；当 $a<0.03$ 时，对截距显著性检验误判率的影响不大。而当 $a=0.99$ 时，斜率显著性检验误判率为 37.5％，对截距显著性检验误判率为 67.3％。

按照类似的研究方法，假设真实的异方差为 $\sigma_i^2=(a+X_i)^2$，将其识别为 $\sigma_i^2=X_i^2$ 进行 WLS，样本长度为 250 时 5％显著水平下对斜率与截距显著性检验的误判率如图 2 所示。

可以看到，其影响更为显著，当 $a=0.01$ 时，截距显著性检验误判率为 26.45％，明显高于显著水平 5％，影响已经非常显著了。

结果表明，Glesjer 检验识别异方差时忽略截距项的影响是不可接受的。

2. White 检验异方差识别问题

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，设定异方差为 $\sigma_i^2=X_i^2-10X_i+25.1$，按照仿真实验设计的方法，在不同样本长度下对式（1）进行 2000 次重复实验，分别使用 OLS 及不同异方差形式的

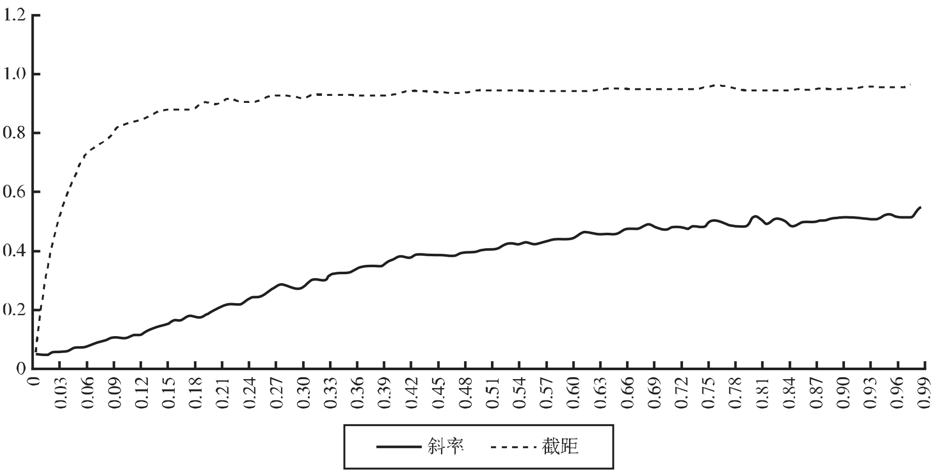

图 2　显著性检验误判率随 α 的变化曲线

WLS 进行估计。使用 White 异方差检验及识别方法时，如果将此时的异方差识别为 $\sigma_i^2=X_i$ 或 $\sigma_i^2=X_i^2$ 进行 WLS 是否可行呢？是否可得到一个 BLUE 或接近 BLUE 的结果呢？我们分别对异方差形式为设定的真实异方差、X_i、X_i^2 的不同情形进行仿真，样本长度为 250 时的斜率仿真结果如表 13 所示。

表 13　斜率均值、方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	OLS	$\sigma_i^2=f(X_i)$	$\sigma_i^2=X_i$	$\sigma_i^2=X_i^2$
均值	−0.409	−1.207	6.883	65.290
实方	6.636	4.513	433.884	11207.036
估方	4.057	4.434	18.444	1525.548
误判率	0.120	0.052	0.747	0.607

从仿真结果可以看出，如果将异方差识别为 $\sigma_i^2=X_i$ 或 X_i^2 的形式进行 WLS，参数估计方差远大于有效的方差，且软件输出的方差是错误的，明显小于参数估计的实际方差，导致显著高估显著性，很大机会得到一个伪回归的结果。仿真结果也同时表明，WLS 时只识别出引起异方差的变量而不了解其准确结构是没有意义的。普通 OLS 可得到一个无偏但非有效的结果，软件输出的方差估计略小于参数估计的真实方差，导致高估显著性，可能引起伪回归。从结果对比看，不管参数估计的精度，还是伪回归的程度，OLS 的结果都要比以 $\sigma_i^2=X_i$ 或 X_i^2 的形式进行 WLS 的结果好些。

表 14 为不同样本长度时最佳方差、基于 OLS 得到的实际方差和稳健方差估计结果的样本均值，以及 5% 显著水平下基于 OLS 方差估计及稳健方差估计的显著性检验的误判率，同时也包含了 BLUE 最佳估计的最小分辨尺度及 OLS 估计的实际最小可分辨尺度。

可以看出，不同样本大小下，稳健方差估计与实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计得到了实际方差的较好估计。

随着样本增大，尽管存在异方差，OLS 参数估计的实际方差呈现出越来越小的趋势，并趋近于 0，表明了 OLS 参数估计的一致性。

常规 OLS 的显著性检验存在明显的检验水平扭曲，易将不显著的参数误判为显著，并

且检验水平扭曲现象并不随着样本增大而改善；基于稳健方差所得的显著性检验的误判率跟选定的显著水平相仿。

表 14　　斜率方差估计（$\times 10^{-3}$）及显著性检验误判率（显著水平为 5%）

	25	50	100	150	250	500	1000	2000
最佳方差	45.749	21.682	10.664	7.601	4.513	2.189	1.096	0.532
最佳分辨尺度	0.856	0.589	0.413	0.349	0.269	0.187	0.132	0.092
实际方差	77.928	33.809	16.768	12.655	6.636	3.821	1.954	0.859
实际分辨尺度	1.117	0.735	0.518	0.450	0.326	0.247	0.177	0.117
稳健方差估计	68.626	32.031	16.357	12.835	6.865	3.771	1.837	0.891
显著性检验	0.119	0.118	0.106	0.138	0.111	0.130	0.129	0.115
显著性稳健检验	0.092	0.066	0.056	0.049	0.046	0.056	0.061	0.044

同样样本大小情况下，OLS 实际可分辨尺度较最佳的 BLUE 估计可分辨尺度增大，表明参数固定时基于 OLS 参数估计及稳健方差估计的假设检验功效下降。比如样本为 25 时，使用准确异方差形式的 WLS 的最佳分辨尺度为 0.856，表明式（1）中 $\beta_2=0.856$ 的检验功效约为 97.5%；但使用 OLS 及稳健方差估计时，可估算出其检验功效约为 0.836，将有 16.4%的概率将 $\beta_2=0.856$ 误判为不显著。

五、WLS 抗干扰能力仿真研究

当知道异方差的准确形式时，WLS 可得到 BLUE 估计。但估计或推断异方差形式时，难免出现测量误差或估计误差（刘田等，2014），这多少会对 BLUE 性有影响。我们关注的问题是，BLUE 性对误差敏感吗？或者说 WLS 抗干扰能力如何呢？

选定 $\beta_1=0$，$\beta_2=0$，按照仿真实验设计的方法，假设使用 $\sigma_i^2=X_i$ 进行 WLS，但真实异方差为 $\sigma_i^2=X_i+e_i$，两者间存在的差异为 e_i。定义信噪比 $SNR=\sqrt{Var(X_i)/Var(e_i)}$ 描述差异的大小，显然信噪比越大，对 WLS 的影响越小。生成（0，10）间均匀分布的干扰噪声 v_i，令 $e_i=av_i\sqrt{\dfrac{Var(X_i)}{Var(v_i)}}$，此时有 $SNR=1/a$。分别以 $a=0$，0.01，0.02，…，0.99 进行仿真实验，0 对应无差异。选择 5%的显著水平，样本长度为 250，a 的每个取值重复 2000 次实验可计算出斜率与截距显著性检验的误判率。

可以看到，误判率对 a 的取值相当敏感，随着 a 值的增加，斜率与截距显著性检验的误判率都迅速增加。当 $a=0.02$，此时信噪比为 50，斜率显著性检验误判率为 13.65%，截距显著性检验误判率为 36.7%；当 $a=0.1$，此时信噪比为 10，斜率显著性检验误判率为 32.6%，截距显著性检验误判率为 59.9%，已经完全不能接受。

假设使用 $\sigma_i^2=X_i^2$ 进行 WLS，但真实异方差为 $\sigma_i^2=X_i^2+e_i$，按照同样的仿真过程，发现其误判率对信噪比更为敏感。当 $a=0.02$（对应信噪比为 50）时，斜率显著性检验误判率为 51.45%，截距显著性检验误判率为 95.65%。

仿真结果表明，WLS 的 BLUE 性对误差相当敏感，抗干扰能力很差，稳健性不足。

六、结　　论

基于理论分析和蒙特卡洛仿真，本文对异方差时使用常规 OLS 方法及 WLS 时异方差或

权重错误选择导致的对无偏性、一致性、方差估计、参数可分辨尺度及显著性检验可靠性等问题进行了研究，特别是对异方差相关的伪检验问题进行了详细研究。研究结果表明：

对同方差情形，当使用某种形式的异方差结构进行 WLS 时虽然可得到无偏的估计，但将导致参数估计精度下降。更严重的是，此时软件输出的方差结果是错误的：通常明显小于真实方差，导致显著性检验时倾向于高估显著性，得到伪回归的结果；有时也会大于真实方差，导致易将显著的参数误判为不显著。

对异方差情形，使用正确的异方差进行 WLS 可得到最佳的估计结果，具有最小的方差及最精细的参数可分辨尺度。若使用错误的异方差形式进行 WLS，虽依然可得到无偏估计，但参数估计的实际方差显著大于有效的方差，且软件输出的方差是错误的，通常明显小于真实方差，易得到伪回归的结果，有时也会大于真实方差，导致显著性的误判。很多时候误用异方差形式的 WLS 会得到比不考虑异方差问题直接使用 OLS 更差的结果，这表明异方差检验不适用“谨慎性原则”：在是否存在异方差检验结论模糊时假设存在异方差并不是一个明智的选择。实践中有人使用残差平方作为异方差的估计进行 WLS，仿真研究表明此时参数估计精度跟 OLS 结果是极为类似的，但软件算出的方差都明显小于参数估计的真实方差，导致显著性检验的误判率非常高，极易得到一个伪回归的结果。故而这样处理毫无价值。

存在异方差时，普通 OLS 可得到一个无偏的估计，并且参数估计的实际方差随着样本增大逐步趋近于 0，表明了参数估计的一致性。一致性表明随着样本增大参数估计逼近参数真实值，但这并不表明大样本条件下，可以直接使用 OLS 进行参数估计与假设检验而不关注异方差问题，因为统计软件的方差估计在样本增大时依然是错误的，导致显著性检验的水平扭曲现象并不随着样本增大而改善，将不显著参数误判为显著得到伪回归或将显著参数误判为不显著的可能性不会因为样本增大而改善。

不管有无异方差问题，不同样本大小下的稳健方差估计与 OLS 参数估计的实际方差都是相仿的，表明稳健方差估计可得到实际方差的较好估计。存在异方差时的方差稳健估计不是有效的，比最佳方差偏大，甚至远大于最佳方差。偏大的方差对假设检验的检验水平通常没有太大影响，显著性检验的误判率在样本较大时跟选定的显著水平相仿，只在极少数情况会造成显著性的低估。但这并不表示非最优的估计对假设检验没有影响，可以滥用稳健方差方法而不考虑异方差的影响。可以看到，同样样本大小情况下，OLS 对参数的实际可分辨尺度较最佳的 BLUE 估计可分辨尺度明显增大，表明参数固定时基于 OLS 参数估计及稳健方差估计的假设检验功效明显下降，易将显著的参数误判为不显著。要想达到跟最佳估计同样的检验功效和分辨尺度，需要大得多的样本容量。按照本文的仿真设计，当异方差为 $\sigma_i^2=X_i$ 且样本数为 25 时，式（1）中 $\beta_2=0.358$ 的 BLUE 估计的检验功效约为 0.975；使用 OLS 及稳健方差估计的检验功效为 0.618，当样本增大到 50 时检验功效为 0.920，增大到 100 时功效为 0.998。当异方差为 $\sigma_i^2=X_i^2$ 且样本数为 25 时，$\beta_2=0.816$ 的 BLUE 估计的检验功效约为 0.975；但 OLS 及稳健方差估计的检验功效为 0.433，样本增大到 100 时的检验功效为 0.983。

WLS 需要使用准确异方差形式时才是 BLUE 的，其最佳性对误差相当敏感，抗干扰能力很差，稳健性不足。Glesjer 检验识别异方差时忽略截距项的影响是不可接受的。使用 White 异方差检验及识别方法时，如果只将异方差识别为 $\sigma_i^2=X_i$ 或 $\sigma_i^2=X_i^2$ 而不是完整的异方差结构进行 WLS 是毫无意义的，丝毫无助于估计及检验结果的改善。故而异方差识别时只识别出引起异方差的变量而不了解其准确结构没有意义。

参 考 文 献

[1] Glesjer H., 1969, *A New Test for Heteroskedasticity* [J], Journal of the American Statistical Association, 64 (325), 316～323.

[2] White H., 1980, *A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a District Test of Heteroskedasticity* [J], Econometrica, 48 (4), 817～838.

[3] 达摩达尔·N. 古扎拉蒂、唐·C. 波特：《计量经济学基础》[M]，中国人民大学出版社，2011。

[4] 刘田、谈进、史代敏：《测量误差对单位根检验的影响》[J]，《数理统计与管理》2014 年第 6 期。

[5] 刘田、谈进、史代敏：《单位根检验中样本长度的选择》[J]，《数理统计与管理》2013 年第 4 期。

[6] 潘省初：《计量经济学中级教程》[M]，清华大学出版社，2009。

[7] 庞皓：《计量经济学》[M]，科学出版社，2017。

Research of Spurious Test Concerning Heteroscedasticity

Liu Tian[1]　Tan Jin[2]

(1. School of Statistics, Southwestern University of Finance and Economics;
2. School of Economic Information Engineering,
Southwestern University of Finance and Economics)

Research Objectives: This article addresses the circumstances which give rise of spurious test concerning heteroscedasticity and identification of a parameter which can be distinguished. **Research Methods:** Theoretical analysis and Monte Carlo simulation. **Research Findings:** In the situation of homoscedasticity or heteroscedasticity, the hypothesis test of WLS using improper heteroscedasticity assumption is wrong and prone to spurious regression, often worse than the direct use of OLS; Although the estimator is consistent in heteroscedasticity, the hypothesis test cannot be used directly even if samples are large, because the possibility of obtaining spurious regression or mistaking the significant parameter for insignificant one is unable to be improved with the increase of sample size; Robust variance estimation can obtain good estimation of actual variance of OLS, usually having no effect on misjudgment of the null hypothesis, but the ability of parameter distinguish becomes worse and the test power decreases obviously; The BLUE property of WLS is not robust, it makes no sense to only recognize the variables without knowing the complete structure that causes heteroscedasticity. **Research Innovations:** The formula of parameter resolution ratio is derived, and the idea of avoiding pseudo test with heteroscedasticity is offered. **Research Value:** This paper provides useful suggestions for the correct evaluation of models with heteroscedasticity.

Key Words: Heteroscedasticity; Parameter Resolution Ratio; Test Power; Spurious Test; Monte Carlo Simulations

JEL Classification: C12; C15

（责任编辑：陈星星）